

# MATEMATYKA

## IV etap edukacyjny

### Cele kształcenia – wymagania ogólne

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	
Uczeń interpretuje tekst matematyczny. Po rozwiązaniu zadania interpretuje otrzymany wynik.	Uczeń używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	
Uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.	Uczeń rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.
III. Modelowanie matematyczne.	

Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.	Uczeń buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.
IV. Użycie i tworzenie strategii.	
Uczeń stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.	Uczeń tworzy strategię rozwiązania problemu.
V. Rozumowanie i argumentacja.	
Uczeń prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.	Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

### Treści nauczania – wymagania szczegółowe

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
1. Liczby rzeczywiste. Uczeń:	
1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamek zwykłego, ułamek dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg); 2) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych); 3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach; 4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych; 5) wykorzystuje podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką); 6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym; 7) oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia; 8) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej; 9) wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:  1) wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $ x - a  = b$ , $ x - a  < b$ , $ x - a  \geq b$ . 2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.
2. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:	

<p>1) używa wzorów skróconego mnożenia na <math>(a \pm b)^2</math> oraz <math>a^2 - b^2</math>.</p>	<p>spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) używa wzorów skróconego mnożenia na <math>(a \pm b)^3</math> oraz <math>a^3 \pm b^3</math>;</li> <li>2) dzieli wielomiany przez dwumian <math>ax + b</math>;</li> <li>3) rozkłada wielomiany na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias;</li> <li>4) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany;</li> <li>5) wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych;</li> <li>6) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne.</li> </ol>
---	---

### 3. Równania i nierówności. Uczeń:

<ol style="list-style-type: none"> <li>1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności;</li> <li>2) wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;</li> <li>3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;</li> <li>4) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą;</li> <li>5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;</li> <li>6) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu <math>x^3 = -8</math>;</li> <li>7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu <math>x(x + 1)(x - 7) = 0</math>;</li> <li>8) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. <p style="text-align: center;"><math>\frac{x+1}{x+3} = 2, \frac{x+1}{x} = 2x.</math></p> </li> </ol>	<p>spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) stosuje wzory Viète'a;</li> <li>2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem;</li> <li>3) rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych;</li> <li>4) stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian <math>x - a</math>;</li> <li>5) stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych;</li> <li>6) rozwiązuje równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych;</li> <li>7) rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe;</li> <li>8) rozwiązuje proste nierówności wymierne typu: <p style="text-align: center;"><math>\frac{x+1}{x+3} &gt; 2, \frac{x+3}{x^2-16} &lt; \frac{2x}{x^2-4x}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{3x-2}{4x-7} \leq \frac{1-3x}{5-4x};</math></p> </li> <li>9) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym, niż: <p style="text-align: center;"><math>  x + 1  - 2  = 3,  x + 3  +  x - 5  &gt; 12.</math></p> </li> </ol>
---	--

### 4. Funkcje. Uczeń:

<ol style="list-style-type: none"> <li>1) określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego;</li> <li>2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość;</li> <li>3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);</li> <li>4) na podstawie wykresu funkcji <math>y = f(x)</math> szkicuje wykresy funkcji <math>y = f(x + a)</math>, <math>y = f(x) + a</math>, <math>y = -f(x)</math>, <math>y = f(-x)</math>;</li> <li>5) rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru;</li> <li>6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie;</li> <li>7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;</li> <li>8) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru;</li> <li>9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;</li> <li>10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje);</li> <li>11) wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;</li> <li>12) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym);</li> <li>13) szkicuje wykres funkcji <math>f(x) = a/x</math> dla danego <math>a</math>, korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi;</li> <li>14) szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;</li> <li>15) posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.</li> </ol>	<p>spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) na podstawie wykresu funkcji <math>y = f(x)</math> szkicuje wykresy funkcji <math>y =  f(x) </math>, <math>y = c \cdot f(x)</math>, <math>y = f(cx)</math>;</li> <li>2) szkicuje wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw;</li> <li>3) posługuje się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;</li> <li>4) szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takiej funkcji z wykresu.</li> </ol>
---	--

5. Ciągi. Uczeń:	
1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; 2) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny; 3) stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; 4) stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: <ol style="list-style-type: none"> <li>1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym;</li> <li>2) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu <math>1/n</math>, <math>1/n^2</math> oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów;</li> <li>3) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.</li> </ol>
6. Trygonometria. Uczeń:	
1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od $0^\circ$ do $180^\circ$ ; 2) korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora); 3) oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną); 4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{oraz}$ $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha;$ 5) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: <ol style="list-style-type: none"> <li>1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;</li> <li>2) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego);</li> <li>3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;</li> <li>4) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (np. gdy rozwiązuje nierówności typu <math>\sin x &gt; a</math>, <math>\cos x \leq a</math>, <math>\operatorname{tg} x &gt; a</math>);</li> <li>5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów;</li> <li>6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu <math>\sin 2x = \frac{1}{2}</math>, <math>\sin 2x + \cos x = 1</math>, <math>\sin x + \cos x = 1</math>, <math>\cos 2x &lt; \frac{1}{2}</math>.</li> </ol>
7. Planimetria. Uczeń:	
1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym; 2) korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych; 3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów; 4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: <ol style="list-style-type: none"> <li>1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu;</li> <li>2) stosuje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych;</li> </ol>

<p>trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.</p>	<p>3) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta itp.);</p> <p>4) rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności;</p> <p>5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.</p>
<p>8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:</p>	
<p>1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);</p> <p>2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;</p> <p>3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;</p> <p>4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;</p> <p>5) wyznacza współrzędne środka odcinka;</p> <p>6) oblicza odległość dwóch punktów;</p> <p>7) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.</p>	<p>spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</p> <p>1) interpretuje graficznie nierówność liniową z dwiema niewiadomymi oraz układy takich nierówności;</p> <p>2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych;</p> <p>3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt;</p> <p>4) oblicza odległość punktu od prostej;</p> <p>5) posługuje się równaniem okręgu <math>(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2</math> oraz opisuje koła za pomocą nierówności;</p> <p>6) wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu;</p> <p>7) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach;</p> <p>8) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji.</p>
<p>9. Stereometria. Uczeń:</p>	
<p>1) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów;</p> <p>2) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów;</p> <p>3) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą</p>	<p>spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</p> <p>1) określa, jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną;</p> <p>2) określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.</p>

<p>a podstawą), oblicza miary tych kątów;</p> <p>4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami;</p> <p>5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;</p> <p>6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.</p>	
<p>10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Uczeń:</p>	
<p>1) oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych;</p> <p>2) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania;</p> <p>3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.</p>	<p>spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</p> <p>1) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych;</p> <p>2) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe;</p> <p>3) korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.</p>
<p>11. Rachunek różniczkowy. Uczeń:</p>	
	<p>1) oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych;</p> <p>2) oblicza pochodne funkcji wymiernych;</p> <p>3) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej;</p> <p>4) korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji;</p> <p>5) znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych;</p> <p>6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.</p>